Equações diferenciais

Uma eq. diferencial ordinária (EDO) é uma eq. relacionando uma função incógnita $y(x)$ e suas derivadas.

A ordem da EDO é a ordem da maior derivada presente na equação.

A solução de uma EDO é uma função que satisfaz a equação.

Exemplos: 1) $y'(x) = x^3$ $\qquad y' = x^3$ (ordem 1)

$y = \frac{x^4}{4} + C$ é solução da EDO, pois

$y' = 4\frac{x^3}{4} = x^3$

2) $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ (ordem 1)

$y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}$ é solução? (c é cte)

$$\to y' = \frac{ce^x(1-ce^x) - (1+ce^x)\cdot(-ce^x)}{(1-ce^x)^2} = \frac{ce^x - \cancel{c^2e^{2x}} + ce^x + \cancel{c^2e^{2x}}}{(1-ce^x)^2}$$

$$= \frac{2ce^x}{(1-ce^x)^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(y^2-1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^x}{1-ce^x}\right)^2-1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+2ce^x+c^2e^{2x}}{(1-ce^x)^2}-1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+2ce^x+c^2e^{2x}-(1-ce^x)^2}{(1-ce^x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{1}+2ce^x+\cancel{c^2e^{2x}}-\cancel{1}+2ce^x-\cancel{c^2e^{2x}}}{(1-ce^x)^2}\right] = \frac{2ce^x}{(1-ce^x)^2}$$

Portanto, $y=\dfrac{1+ce^x}{1-ce^x}$ é solução da EDO.

3) Uma população cresce de forma proporcional ao número de indivíduos.

t	0	1	2	3	4	5	6	...
$P(t)$	1	2	4	8	16	32	64	...

ΔP 1   2   4   8   16   32

$P(t)$: número de indivíduos no tempo t.

$P'(t)$: taxa de variação de P com rel. a t.

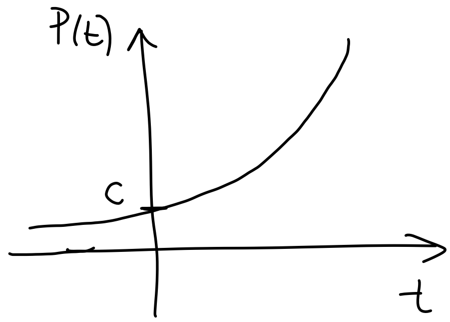
$$P'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte de prop.}}}{k}\cdot P(t)$$

$P' = kP$

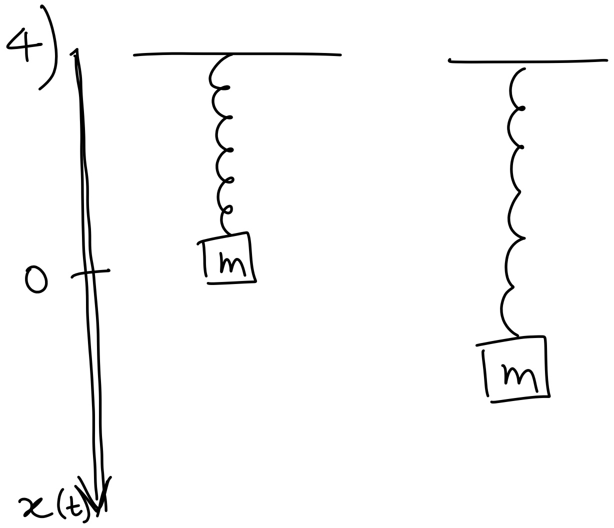
(EDO de ordem 1)

$P(t) = ce^{kt}$ é solução.

$$P'(t) = ce^{kt}k = k(ce^{kt}) = kP(t)$$



4)

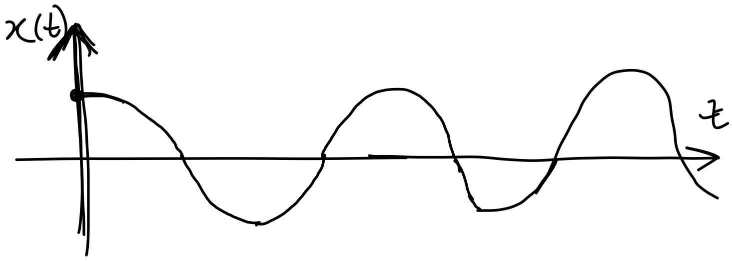


- Lei de Hooke : $F = -kx$
- 2ª lei de Newton : $F = ma$

$$ma = -kx$$

$$mx'' = -kx$$

$$x'' = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \text{(EDO de 2ª ordem)}$$



$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$x' = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'' = -\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = -\frac{k}{m} \overbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}^{x} = -\frac{k}{m} x$$

$$v' = (x')' = x''$$

$$a = v' = x''$$